an Hand des reichhaltigen Beobachtungsmaterials von S. A. Mitchell, hält die rasche Temperaturabnahme in der Chromosphäre bis zu Höhen von vielen hundert Kilometern noch an; erst in noch größeren Höhen bereitet sich dann der Temperaturanstieg vor, der in der *Korona* zu Temperaturen von $\sim 500000^{\circ}$ führt. Nach L. Biermann und P. ten Bruggencate [26] kann man diese Erwärmung der alleräußersten Sonnenschichten vielleicht auf das Einstürzen kosmischer Materie zurückführen.

Die erheblichen Temperaturunterschiede, welche nach dem Gesagten noch in den äußersten Schichten der Sonnenatmosphäre zu erwarten sind, werden auch für die Theorie der *Restintensitäten* in der Mitte der Fraunhofer-Linien wie für die Deutung der *Spektroheliogramme* von Bedeutung sein. Eine detaillierte Behandlung dieser Probleme dürfte sich jedoch erst in Verbindung mit eingehenden Modellrechnungen lohnen.

[26] L. Biermann u. P. ten Bruggencate, Veröff. Göttinger Sternwarte Nr. 83 [1947].

Zur maßsystem-anpassungsfähigen Schreibweise der Elektrodynamik

Von Rudolf Fleischmann

Aus dem Physikalischen Staatsinstitut Hamburg

(Z. Naturforschg. **3a**, 492—495 [1948]; eingegangen am 9. Juli 1948)

Die elektrischen Grundgleichungen und die Hauptformeln der vierdimensionalen Elektrodynamik werden in einer Schreibweise mitgeteilt, die unabhängig vom Maßsystem richtig ist und durch Spezialisierung in die für die üblichen Maßsysteme gültigen Formeln übergeht.

Jeder Physiker weiß, wie viel mühselige Leerlaufarbeit durch das Nebeneinander und Durcheinander der verschiedenen elektrischen Maßsysteme entsteht. Ich gehe im folgenden davon aus, daß das Nebeneinander gegenwärtig und mit Rücksicht auf die vorhandenen Lehr- und Handbücher auch in einiger Zukunft nicht zu vermeiden ist, und habe nicht die Absicht, die Vorzüge oder Nachteile dieser Systeme miteinander zu vergleichen. Mein Ziel ist vielmehr, zu einer Beschreibung zu gelangen, die *alle Maßsysteme gleichzeitig* umfaßt. Die Naturvorgänge sind unabhängig von Maßsystemen, sie müssen sich daher auch in einer allgemeinen maßsystemunabhängigen Form darstellen lassen.

Man kann die Formeln der Elektrodynamik maßsystemunabhängig schreiben, indem man vier Faktoren einführt, deren Bedeutung aus einer Tabelle für jedes Maßsystem entnommen werden kann. Der Übergang von den Formeln des einen Systems zu denen des anderen wird so äußerst bequem und zuverlässig ausführbar. Im folgenden sollen vor allem die wichtigsten Formeln der lorentzinvarianten Elektrodynamik, wie sie im Artikel von A. Sommerfeld in Frank-Mises[1] in so vollendeter Weise mitgeteilt sind, in der maßsystemunabhängigen (umsetzbaren) Form angegeben werden.

[1] Ph. Frank u. R. v. Mises (Riemann-Weber), Differential- und Integralgleichungen der Physik, Braunschweig 1927, Bd. 2, S. 391—429.

Die allgemeinen Konstanten. Die maßsystemunabhängige Schreibweise findet sich, soweit mir bekannt ist, zum erstenmal in wesentlichen Teilen bei E. Cohn[2], vollständig bei F. Emde[3]. In unseren Konstanten ist der Faktor 4π anders untergebracht als bei Emde. Ich sehe darin eine Verbesserung. Die vier Konstanten sind:

1. Der „Flußfaktor" ν, der das Verhältnis zwischen „elektrischem Fluß" $\Omega = \int \mathfrak{D}_n\, df$ und der „durchgeflossenen Elektrizitätsmenge" e willkürlich festsetzt. In altertümlicher Redeweise kann man auch sagen: ν gibt die Zahl der Kraftlinien an, die nach Definition vom Einheitspol ausgehen. Der gleiche Faktor gilt zwischen den entsprechenden magnetischen Größen, nämlich dem „magnetischen Fluß" $\Psi = \int \mathfrak{B}_n\, df$ und der „magnetischen Polstärke" m. Es ist $\Omega = \nu e$ und $\Psi = \nu m$.

2. Der Ausgleichsfaktor γ, der auftritt, wenn die linke Seite einer Maxwellschen Gleichung mit der

[2] E. Cohn, Das elektromagnetische Feld, 2. Aufl., 1927.

[3] F. Emde, Handwörterbuch der Naturwissenschaften. Verlag G. Fischer, Jena 1932, 2. Aufl., Bd. 7, S. 1016.

rechten Seite verknüpft wird, also insbesondere einerseits die magnetische Spannung um einen stromdurchflossenen Draht, andererseits die elektrische Stromstärke in diesem. Es ist $\gamma/\nu = J/\oint \mathfrak{H}\, d\mathfrak{s}$. Das praktische Maßsystem ist so eingerichtet, daß $\gamma = \nu = 1$ ist.

3. Die elektrische Grundkonstante ε_* („Influenzkonstante"), definiert durch $\varepsilon_* = \mathfrak{D}/\mathfrak{E} = (\nu\, \eta_e)/\mathfrak{E}$, durch die der Potentialgradient (die „Feldstärke") $\mathfrak{E}$ im Raum *neben* einer Metallplatte mit dem ν-fachen der Flächendichte η_e der elektrischen Ladung (influenzierten Ladung) *auf* der Metallplatte verknüpft wird.

4. Die magnetische Grundkonstante μ_* („Induktionskonstante"). Sie wird definiert durch $\mu_* = \mathfrak{B}/\mathfrak{H} = (\nu \eta_m)/\mathfrak{H}$. Durch sie wird der Potentialgradient (die „Feldstärke") $\mathfrak{H}$, also die Kraft je Einheit der Polstärke, mit der Flächendichte der Induktion $\mathfrak{B}$, also dem Spannungsstoß je Flächeneinheit verknüpft. η_m ist die Flächendichte der magnetischen Polstärke, in einer Flächenrichtung gemessen, die senkrecht steht zu der im Außenraum herrschenden Feldstärke $\mathfrak{H}$.

Die Grundgleichungen. Wir wenden uns zur maßsystemunabhängigen Schreibweise der Maxwellschen Gleichungen. Emde verwendet ε_0 als *allgemeines* Zeichen, das durch $\eta_e/\mathfrak{E}$ definiert ist. Wir benutzen als allgemeines Zeichen ε_* und bezeichnen damit das, was Emde mit $\nu\varepsilon_0$ bezeichnet, und analog mit μ_*, was Emde mit $\nu\mu_0$ bezeichnet[4].

Bei uns sollen ε_0 und μ_0 die *speziellen* Werte von ε_* und μ_* in praktischen Einheiten bedeuten. Die untenstehenden maßsystemunabhängigen Formeln sind *mit der Sommerfeldschen Numerierung* versehen, und es sind *die Sommerfeldschen Bezeichnungen* verwendet. Die Maxwellschen Gleichungen für Vakuum lauten dann[5]:

$$\text{(I)}\quad \dot{\mathfrak{B}} = -\gamma\cdot\operatorname{rot}\mathfrak{E} \qquad \text{(III)}\quad \operatorname{div}\mathfrak{B} = 0 \qquad \text{(V)}\quad \mathfrak{D} = \varepsilon_*\cdot\mathfrak{E}$$

$$\text{(II)}\quad \dot{\mathfrak{D}} + \nu\varrho\mathfrak{v} = \gamma\cdot\operatorname{rot}\mathfrak{H} \qquad \text{(VI)}\quad \operatorname{div}\mathfrak{D} = \nu\cdot\varrho \qquad \text{(VI)}\quad \mathfrak{B} = \mu_*\cdot\mathfrak{H}$$

Im materieerfüllten Raum ist ε_* durch $\varepsilon_*\varepsilon$ und μ_* durch $\mu_*\mu$ zu ersetzen; ε und μ bleiben auch bei uns dimensionslose Relativzahlen. Da die magnetische Polstärke $m = \int \eta_m\, df$ in diesen Gleichungen nicht vorkommt, geben wir an: $\mathfrak{B} = \nu\eta_m\cdot\mathfrak{n}_0$. Die analoge elektrische Gleichung $\mathfrak{D} = \nu\eta_e\cdot\mathfrak{n}_0$ folgt aus (IV) und (V), dabei ist $\mathfrak{n}_0$ ein Einheitsvektor, der senkrecht zur Fläche steht, in der η_e oder η_m liegt.

Die Ausbreitungsgeschwindigkeit c elektromagnetischer Wellen im Vakuum folgt aus

$$\text{(VII)}\quad \varepsilon_*\mu_* c^2 = \gamma^2;$$

weiter folgt

$$\text{Energiedichte}\quad W = \frac{1}{\nu}\frac{1}{2}\left\{(\mathfrak{E}\,\mathfrak{D}) + (\mathfrak{H}\,\mathfrak{B})\right\},$$

$$\text{Strahlungsvektor}\quad \mathfrak{S} = \frac{\gamma}{\nu}\,[\mathfrak{E}\times\mathfrak{H}],$$

$$\text{Coul. Ges. (elektr.)}\quad \mathfrak{K} = \frac{\nu}{\varepsilon_*}\,\frac{e\cdot e}{4\pi r^2}$$

und ebenso magn., wenn man ε_* und e durch μ_* und m ersetzt.

Man kann (V) und (VI) auch schreiben

$$c\,\mathfrak{D} = \left(\frac{\varepsilon_* c}{\gamma}\right)\gamma\,\mathfrak{E} \qquad \text{und} \qquad c\,\mathfrak{B} = \left(\frac{\mu_* c}{\gamma}\right)\gamma\,\mathfrak{H}.$$

Die beiden Klammerausdrücke stellen besonders wichtige Konstanten dar. Sie geben, miteinander multipliziert, nach (VII) die dimensionslose Zahl 1. $c\mathfrak{D}$ und $c\mathfrak{B}$ spielen in den folgenden Formeln eine besondere Rolle. In den CGS-Formeln kürzt sich häufig c gegen γ weg.

Die allgemeinen Zeichen haben in den verschiedenen Maßsystemen folgende Bedeutung:

Allg. Konstante	bedeutet im Maßsystem prakt. (Giorgi)	Heaviside	Lorentz	Gauß	elektr.	magn.
ν	1	1	1	4π	4π	4π
γ	1	1	c	c	1	1
ε_*	ε_0	c	1	1	1	$1/c^2$
μ_*	μ_0	c	1	1	$1/c^2$	1

Viererpotential und Viererstromdichte. Wiederholt man die Ableitung der Formeln des Sommerfeldschen Artikels unter Mitführen der allgemeinen Konstanten, so ergibt sich für die Beziehungen zwischen dem Vektorpotential $\mathfrak{A}$, dem elektrischen Potential φ, dem Viererpotential Φ und der Viererstromdichte P folgendes:

$$\mathfrak{B} = \operatorname{rot}\mathfrak{A}, \quad (1) \qquad \gamma\,\mathfrak{E} = -\dot{\mathfrak{A}} - \operatorname{grad}\gamma\varphi. \quad (2)$$

[4] Die Verwendung von $\varepsilon_* = \nu\varepsilon_0$ und $\mu_* = \nu\mu_0$ geschieht nach einem Vorschlag von Hrn. F. Goos. Dadurch wird in der folgenden Tabelle im Gaußschen System $\varepsilon_* = \mu_* = 1$, also nicht $= 1/4\pi$ wie bei Emde.

[5] Vgl. dazu S. 402 des Sommerfeldschen Artikels.

Die Zusatzbedingung (5) lautet jetzt

$$\gamma \varphi / c^2 + \operatorname{div} \mathfrak{A} = 0, \tag{5}$$

und es ist

$$\gamma \Phi = \{ c \mathfrak{A}, \quad i \gamma \varphi \},$$

$$\nu P = \{ \nu \varrho \mathfrak{v}, \quad i \nu \varrho c \};$$

$$\Box (\gamma \Phi) = - \left(\frac{\mu_* c}{\gamma} \right) \nu P = - \left(\frac{\gamma}{\varepsilon_* c} \right) \nu P; \tag{7}$$

aus (5) wird

$$\operatorname{Div} (\gamma \Phi) = 0. \tag{8}$$

(1) und (2) faßt sich zusammen zu

$$\operatorname{rot} (\gamma \Phi) = (c \mathfrak{B}, - i \gamma \mathfrak{E}); \tag{9}$$

Die rechte Seite von (9) ist der Sechservektor mit den Komponenten f_{kh} ([1] S. 404). Multipliziert man diesen mit $(\varepsilon_* c / \gamma)$, so entsteht mit Rücksicht auf (VI) und (VII) der Sechservektor $(\gamma \mathfrak{H}, - i c \mathfrak{D})$. Multipliziert man diesen mit $(\mu_* c / \gamma)$, so entsteht wieder der ursprüngliche Sechservektor $(c \mathfrak{B}, - i \gamma \mathfrak{E})$.

Die in Anm. 1, S. 406, definierten zwei Sechservektoren lauten

$$(\gamma \mathfrak{H}, - i c \mathfrak{D}) \quad \text{und} \quad (c \mathfrak{B}, - i \gamma \mathfrak{E}); \tag{11}$$

sie sind mit den eben erwähnten identisch. In unserer Darstellung sind die Verhältnisse also vereinfacht. Wir brauchen nur *einen* Sechservektor und zwei Konstanten, die sich aus der *symmetrischen*[6] Aufspaltung von (VII) ergeben. Dabei sehen wir gleichzeitig, daß maßsystemunabhängig nicht $\mathfrak{H}$ und $\mathfrak{D}$ einerseits und $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{E}$ andererseits zusammenzuordnen sind, sondern $\mathfrak{H}$ und $c \mathfrak{D} / \gamma$ einerseits und $c \mathfrak{B} / \gamma$ und $\mathfrak{E}$ andererseits.

Nach obiger Tabelle nimmt Gl. (7) für die verschiedenen Systeme die Form $\Box \Phi = - \alpha P$ an, wobei im Lorentz-System $\alpha = 1/c$, im Gaußschen System $\alpha = 4 \pi / c$, im praktischen System $\alpha = \mu_0 c$ wird. Bei Sommerfeld[1] findet sich im Lorentz-System $\alpha = 1$, bei Mie[7] im praktischen System $\alpha = \mu_0$. Dies rührt davon her, daß der Faktor $1/c$ bei Sommerfeld in die Stromdichte P hineingenommen ist und daß bei Mie statt des Sechservektors $(\mathfrak{H}, - i c \mathfrak{D})$ ein Sechservektor $(\mathfrak{H}/c, - i \mathfrak{D})$ verwendet wird.

Feldausbreitung mit Lichtgeschwindigkeit. Für ein mit Lichtgeschwindigkeit $\mathfrak{c}$ vorrückendes Feld $\mathfrak{E}_\perp$ $\mathfrak{H}_\perp$ $\mathfrak{c}$ ergibt sich der Zusammenhang

$$|\mathfrak{H}| = \left(\frac{\varepsilon_* c}{\gamma} \right) \cdot |\mathfrak{E}| = \frac{c |\mathfrak{D}|}{\gamma}$$

$$\text{und} \quad |\mathfrak{E}| = \left(\frac{\mu_* c}{\gamma} \right) \cdot |\mathfrak{H}| = \frac{c |\mathfrak{B}|}{\gamma}.$$

Wir sehen wieder, daß $(\varepsilon_* \cdot c / \gamma)$ und $(\mu_* \cdot c / \gamma)$ und nicht ε_* und μ_* die maßgebenden elektrischen bzw. magnetischen Konstanten sind. In praktischen Einheiten wird daraus $\mathfrak{E}/\mathfrak{H} = \mu_0 c = 376{,}7 \frac{\mathrm{V/m}}{\mathrm{A/m}}$ (oder Ohm), der sog. Wellenwiderstand des leeren Raumes, und $\varepsilon_0 c = \frac{1}{\mu_0 c} = \frac{1}{376{,}7} \frac{\mathrm{A/m}}{\mathrm{V/m}}$.

Die Lorentz-Transformation (transversal, Anm. 1, S. 411) lautet

$$\gamma \mathfrak{E}'_\perp = \frac{\gamma \mathfrak{E} + [\mathfrak{v} \times \mathfrak{B}]}{\sqrt{1 - \beta^2}}; \qquad \gamma \mathfrak{H}'_\perp = \frac{\gamma \mathfrak{H} - [\mathfrak{v} \times \mathfrak{D}]}{\sqrt{1 - \beta^2}}.$$

Im Zähler der Brüche treten fast die gleichen Glieder auf wie in den Sechservektoren (9) und (11), nur wird c durch $\mathfrak{v}$ ersetzt.

Die Ausstrahlung eines elektrischen Dipols[8] vom Moment $\mathfrak{p}$ (t). Für den Hertzschen Vektor Π und das Vektorpotential $\mathfrak{A}$ gilt[9]

$$\Pi = \nu \frac{\mathfrak{p} (t - r/c)}{4 \pi r}, \tag{2}$$

$$\gamma \mathfrak{A} = \mu_* \nu \dot{\Pi} \qquad \text{oder} \qquad c \mathfrak{A} = \left(\frac{\mu_* c}{\gamma} \right) \nu \dot{\Pi}. \tag{3}$$

Für die Ausstrahlung eines schwingenden Dipols gilt

$$\mathfrak{S} = \left(\frac{\ddot{\mathfrak{p}} \sin \vartheta}{4 \pi r c} \right)^2 \left(\frac{\gamma}{\varepsilon_* c} \right) = \left(\frac{\ddot{\mathfrak{p}} \sin \vartheta}{4 \pi r c} \right)^2 \left(\frac{\mu_* c}{\gamma} \right). \tag{15}$$

Gegenüberstellung und Diskussion. Wir stellen die beiden wichtigsten Maßsysteme einander gegenüber:

[6] Auf eine etwas andersartige Unsymmetrie bei Mie sei hingewiesen. Mie versteht unter Polstärke nicht das oben definierte m, sondern m/μ_0 und das Entsprechende beim magnetischen Moment.

[7] G. Mie, Lehrbuch der Elektrizität und des Magnetismus, 2. Aufl. 1941, S. 578 ff.

[8] Vgl. Anm. 1, S. 421, § 4. Man beachte die neue Numerierung der Formeln.

[9] Im prakt. Maßsystem wird Π in Asec gemessen.

	Praktisches System	Gaußsches System
Eine Stromstärke	$I = \dot{\mathfrak{D}} f$	$I = \frac{\dot{\mathfrak{D}}}{4\pi} f$
bedingt magn. Spannung	$\oint \mathfrak{H}\, d\mathfrak{s} = I$	$\oint \mathfrak{H}\, d\mathfrak{s} = \frac{4\pi}{c} I,$
Um magn. Flußänderung	$\dot{\mathfrak{B}} f$	$\dot{\mathfrak{B}} f$
herrscht elektr. Spannung	$\oint \mathfrak{E}\, d\mathfrak{s} = \dot{\mathfrak{B}} f$	$\oint \mathfrak{E}\, d\mathfrak{s} = \frac{1}{c} \dot{\mathfrak{B}} f,$
Punktkraftgesetz, elektr.	$\lvert\mathfrak{K}\rvert = \frac{1}{\varepsilon_0} \cdot \frac{e\,e}{4\pi r^2}$	$\lvert\mathfrak{K}\rvert = \frac{1}{1} \cdot \frac{e\,e}{r^2},$
Punktkraftgesetz, magn.	$\lvert\mathfrak{K}\rvert = \frac{1}{\mu_0} \cdot \frac{m\,m}{4\pi r^2}$	$\lvert\mathfrak{K}\rvert = \frac{1}{1} \cdot \frac{m\,m}{r^2},$
Ausbreitungsgeschwindigkeit im Vakuum	$c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \cdot \mu_0}}$	$c = \frac{c}{\sqrt{1 \cdot 1}}.$

Im praktischen System wird die Schreibweise von Zeile 2 und 4 vorausgesetzt; die Faktoren in Zeile 5 und 6 werden gefolgert. Im Gaußschen System wird die Schreibweise von Zeile 5 und 6 vorausgesetzt und die Faktoren in Zeile 2 und 4 werden gefolgert.

In den maßsystemunabhängigen Formeln tritt ein Faktor γ auf. Das diesem γ im Gaußschen System entsprechende c ist als Maßsystemfaktor zu betrachten und rührt von der, von den Maxwellschen Gleichungen unabhängigen Wahl der elektrischen und magnetischen Einheiten her. In den maßsystemunabhängigen Formeln erscheint c nur, wenn es die Ausbreitungsgeschwindigkeit elektromagnetischer Wellen bedeutet, nie als Maßsystemfaktor.

Die magn. Flußdichte $\mathfrak{B}$, die durch einen Spannungsstoß je Flächeneinheit gemessen werden kann, und $c\mathfrak{B}/\gamma$, das eine elektrische Feldstärke darstellt, sind *verschiedene* physikalische Größen. Sie fallen im Gaußschen und Lorentzschen System zusammen, da sich dort c und γ gegeneinander wegkürzt.

Wir fragen zum Schluß, ob es möglich ist, die maßsystemunabhängigen Formeln aus den üblichen Formeln etwa des Gaußschen Systems oder des praktischen Systems durch ein einfaches Umsetzverfahren zu gewinnen. Dies ist nur für das prakt. System möglich, wenn man in allen Formeln stets den Faktor γ mitschreibt, wobei im prakt. System $\gamma = I / \oint \mathfrak{H}\, d\mathfrak{s} = 1$ Amp/Amp.-Windung ist. Tut man dies, *so kann man* aus den Formeln des *praktischen* (Giorgi-) Systems zu den allgemeinen Formeln übergehen, indem man

$$\begin{array}{lcccccccc} \text{ersetzt} & \varepsilon_0 & \mu_0 & \gamma & \mathfrak{D} & \mathfrak{B} & \Omega & \Psi & \mathfrak{A} \\ \text{durch} & \frac{\varepsilon_*}{\nu} & \frac{\mu_*}{\nu} & \frac{\gamma}{\nu} & \frac{\mathfrak{D}}{\nu} & \frac{\mathfrak{B}}{\nu} & \frac{\Omega}{\nu} & \frac{\Psi}{\nu} & \frac{\mathfrak{A}}{\nu} \end{array}.$$

Die übrigen Größen, z. B. $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{H}$, bleiben dabei unverändert stehen. Ein Übergang vom Gauß-schen System zu den umsetzbaren Formeln ist *nicht* möglich, auch wenn man γ mitführt, da in diesem System manche Größen verschiedener physikalischer Art nicht auseinandergehalten werden können, wie z. B. elektrische Kapazität und Länge, oder elektrische Polarisierbarkeit und Volumen, oder insbesondere $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{D}$, oder $\mathfrak{H}$ und $\mathfrak{B}$.

Hrn. R. Hilsch, Erlangen, danke ich für den Hinweis auf die maßsystemunabhängige Schreibweise, Hrn. F. Goos, Hamburg, für wertvolle Diskussionen.